ANNÉE 1983

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

(Durée : 1 h 30 - Coefficient : 3)

---==oOOo==---

L'utilisation d'une calculatrice est recommandée

---==oOOo==---

PRELIMINAIRE

Soit m un entier naturel, on pose

$$I_m = \int_{-1}^{1} \frac{x^m}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

Montrer que I_m existe pour tout entier m et montrer que I_m est nul pour m impair .

Dans la suite du problème, on utilisera sans justification les valeurs de I_m données dans le tableau suivant :

m	0	2	4	6	8	10
I_m	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{35\pi}{128}$	$\frac{63\pi}{256}$

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. On pose

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

le degré d'un polynôme Q sera noté deg(Q).

I) On cherche à déterminer une suite de polynômes P_n pour $0 \leq n \leq 6$ satisfaisant aux conditions :

(i) $\deg(P_n) = n$

(ii) le coefficient de x^n dans P_n est 2^{n-1}

(iii) $P_o(x) = 1$

(iv) $\phi(P_n, x^k) = 0$ pour tout entier k, $0 \leq k < n$

1°) a) Déterminer P_1, P_2 .

b) En utilisant sans démonstration la propriété suivante : si l'entier n est pair, P_n est une fonction paire, sinon P_n est une fonction impaire ; déterminer P_3, P_4, P_5.

c) Vérifier que : $P_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

2°) Montrer que P_6 possède six racines que l'on déterminera de façon explicite à l'aide du symbole $\sqrt{\ }$.

Ces six racines seront notées x_1 à x_6 avec :

$$x_6 < x_5 < x_4 < 0 < x_1 < x_2 < x_3$$

On vérifiera que $(x_2)^2$ est rationnel.

II) 1°) Exprimer en fonction de x_1, x_2, x_3 la quantité

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_6(x)}{(x - x_1)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(On demande une identité algébrique et non un calcul numérique).

.../...

2°) Soit x_i une racine quelconque de P_6. On pose :

$$\lambda_i = \frac{1}{P_6'(x_i)} \int_{-1}^{1} \frac{P_6(x)}{(x - x_i)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

où P_6' désigne le polynôme dérivé de P_6.

Montrer que λ_i ne dépend pas de la racine x_i de P_6 choisie. Déterminer explicitement la valeur commune des λ_i qui sera notée λ.

III) Soit n un entier fixé. On désigne par x_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ les racines du polynôme P_n et par λ un réel à préciser.

Dans la suite du problème on fixe normalement n = 6, λ étant alors le réel défini en II) 2°), les x_i ceux calculés en I) 2°).

Afin de rendre cette partie du problème indépendante de ce qui précède, les candidats peuvent, s'ils le désirent, fixer n = 5 ; les racines de P_5 étant

$$x_1 = -x_5 = 0{,}587785252$$

$$x_2 = -x_4 = 0{,}951056516$$

$$x_3 = 0$$

le réel λ correspondant étant $\lambda = 0{,}62831853$

Soit f une fonction de l'intervalle $\left[-1 ; 1\right]$ dans $\mathbb{R}$; on pose

$$S_n(f) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

l'entier n gardant constamment dans tout ce qui suit la valeur (5 ou 6) choisie par le candidat.

1°) On démontre et nous admettrons que si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2n - 1 on a alors :

$$S_n(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

Vérifier cette relation pour le polynôme défini par $f(x) = x^8$; (en effectuant un calcul numérique à partir des valeurs des x_i ou à partir des expressions trouvées au I).

2°) On démontre et nous admettrons de même que si f est telle que

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

existe, alors $S_n(f)$ est une valeur approchée de I.

a) Soit $f : x \longrightarrow \frac{1}{2 - x}$. Calculer $S_n(f)$

b) Soit $f_1 : x \longrightarrow \sqrt{1 - x^2}$. Calculer $S_n(f_1)$.

c) Dans chaque cas comparer S_n à la valeur exacte de l'intégrale calculée par les méthodes usuelles (primitives, changement de variable,...) Comparer la précision de l'approximation.